11 曲线积分与曲面积分

1. 对弧长的曲线积分

定理 L的参数方程为，则曲线积分为



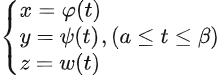
如果曲线弧L：y = ψ(x)

C:\Users\10310\AppData\Local\Microsoft\Windows\INetCache\Content.Word\方程.png

如果曲线弧L：x = φ(y)



空间曲线弧



1. 对坐标的曲线积分

定理 设P(x, y)与Q(x, y)在有向曲线弧L上有定义且连续，L的参数方程为

C:\Users\10310\AppData\Local\Microsoft\Windows\INetCache\Content.Word\方程.png

当参数t单调地由α变到β时，点M(x, y)从L的起点A沿L运动到终点B，若φ(t)与ψ(t)在以α及β为端点的闭区间上具有一阶连续函数，且φ’2(t)+ψ’2(t)≠0，则

C:\Users\10310\AppData\Local\Microsoft\Windows\INetCache\Content.Word\方程.png

空间曲线同理

两类积分曲线的关系



1. 格林公式及其应用

定理1 格林公式 设闭区间D由分段光滑的曲线L围成，若函数P(x, y)及Q(x, y)在D上具有一阶连续偏导数，则有



定理2 设区域G是一个单连通域，若函数P(x, y)与Q(x, y)在G内具有一阶连续偏导数，则曲线积分在G内与路径无关的充要条件是在G内恒成立。



定理3 设区域G是一个单连通域，若函数P(x, y)与Q(x, y)在G内具有一阶连续偏导数，则P(x, y)dx + Q(x, y)dy在G内为某一函数u(x, y)的全微分的充要条件是C:\Users\10310\AppData\Local\Microsoft\Windows\INetCache\Content.Word\方程.png在G内恒成立。

推论 设区域设区域G是一个单连通域，若函数P(x, y)与Q(x, y)在G内具有一阶连续偏导数，则曲线积分C:\Users\10310\AppData\Local\Microsoft\Windows\INetCache\Content.Word\方程.png在G内与路径无关的充要条件是在G内存在函数u(x, y)使du = Pdx + Qdy。

1. 对面积的曲面积分

定义 设曲面Σ是光滑的，函数f(x, y, z)在Σ上有界，把Σ任意分成n小块ΔSi，设(ξi,ηi,ζi)是ΔSi上任意取定的一点，作乘积f(ξi,ηi,ζi)ΔSi，并作和Σf(ξi,ηi,ζi)ΔSi，如果当各小块的直径的最大值趋于0时，这和的极限总存在，称此极限为函数f(x, y, z)在曲面Σ上对面积的曲面积分或第一类曲面积分

C:\Users\10310\AppData\Local\Microsoft\Windows\INetCache\Content.Word\方程.png

曲面积分的计算方法



1. 对坐标的曲面积分

定义 设Σ为光滑的有向曲面，函数R(x, y, z)在Σ上有界。把Σ任意分成n块小曲面ΔSi，ΔSi在xOy面上的投影为(ΔSi)xy，设(ξi,ηi,ζi)是ΔSi上任意取定的一点，作乘积f(ξi,ηi,ζi) (ΔSi)xy，并作和ΣR(ξi,ηi,ζi) (ΔSi)xy，如果当各小块的直径的最大值趋于0时，这和的极限总存在，以下三个积分称为第二类曲面积分



计算方法



两类积分之间的联系



1. 高斯公式 \*通量与散度

定理1 高斯公式

设空间区域Ω是由分片光滑的比曲面Σ所围成，若函数P(x, y, z)，Q(x, y, z)与R(x, y, z)在Ω上具有一阶连续偏导数，则有



1. 斯托克斯公式 \*环流量与旋度